

УДК 621.311

Г.І. Кривобока, А.М. Сільвестров, О.М. Скринник

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ФІЛЬТРІВ ДЛЯ АНАЛІТИЧНОГО ОПИСУ ЛОГІКО-АНАЛІТИЧНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ

In this paper, we develop the approach combining local mathematical models into one comprehensive analytical mathematical model with its significant complications. Partial models are described using as simple analytical dependences as possible. The partial models obtained should be combined in one analytical model through multiplying them with the analytical ones in the whole range of weight functions of the object variables — equivalents of frequency filters. The single uniform analytical dependence is constructed by adding private models weighed by weight functions. The analyticity of the single model for the whole range remains at such statement. In this paper, we present the results confirming the possibility of developing the sufficiently simple analytical model by using the proposed method. Its accuracy of approximation meets modern methods and object-oriented modeling. The models developed by employing this method can be used for analytical calculations of optimum operating modes of non-stationary stochastic objects, diagnostics of their condition, interpolation and extrapolation of variables of object and for other purposes by identifying local mathematical models and their combining into full analytical model without essential complication both of mathematical model and natural experiment.

Вступ

Останнім часом все більшу увагу приділяють числовим методам комп'ютерного моделювання об'єктів ідентифікації ([1–3] та ін.). З одного боку, це обґрунтовано складністю процесів в об'єкті, що досліджується (кусково-нелінійні залежності між його змінними, логіка переключення від однієї частинної моделі до іншої, нестационарність та стохастичність контрольованих і неконтрольованих параметрів та сигналів тощо), з іншого боку — майже необмеженими можливостями сучасних електронно-обчислювальних машин (ЕОМ).

Однак заміна теоретичних досліджень числовими на ЕОМ призводить до втрати загальної рішення тієї чи іншої задачі. Множина рішень задачі числовим моделюванням завжди обмежена. Тому існує ймовірність незмодельованої ситуації на об'єкті, яка може бути небажаною. Це стосується кусково-аналітичних моделей, заміни диференційних залежностей різницевидами (особливо для нестійких об'єктів), апроксимації багатовимірних нелінійних залежностей на кінцевій множині експериментальних даних поліномами високого степеня тощо. Парадоксально, але відсутність ЕОМ сприяла у свій час розвитку фундаментальних положень варіаційного обчислення Ейлера, розробленню ортогональних базисних функцій Фур'є, Лягера, Лежандра й інших, теорії оптимальної фільтрації Вінера і багатьом іншим фундаментальним теоріям у різних сферах науки. Це давало можливість розв'язати задачі оптимізації систем у суто теоретичному загаль-

ному плані, який гарантує бажані результати для всієї множини ситуацій.

Тому і за наявності ЕОМ доцільно максимально використовувати аналітичні рішення, користуючись числовими методами і ЕОМ лише як допоміжними засобами. Далі розглянемо лише одну із таких задач: як отримати єдину аналітичну залежність для моделі, яку подано кусково-аналітичними частковими моделями з логікою переключення від однієї до іншої залежно від координат об'єктів.

Постановка задачі

Враховуючи властивості реальних об'єктів, а це нестационарність, нелінійність і стохастичність, необхідною умовою отримання адекватної (з точністю до епсилон) математичної моделі (ММ) є необхідність періодичного уточнення структури та параметрів ММ на основі спостереження за об'єктом. При цьому, чим складніша ММ, тим складніший, дорожчий і терміновіший буде натурний експеримент на об'єкті. Тому для класу складних нелінійних залежностей в об'єкті, як правило, використовуються логіко-аналітичні моделі, що являють собою множину більш простих локальних ММ з логікою переключення від однієї до іншої залежно від поточного значення координат об'єкта. Локальні ММ отримують з більш простого експерименту, ніж експерименту для побудови повної доволі складної ММ.

Завдання дослідження полягає в розробленні такого підходу, який об'єднуватиме локальні ММ в єдину повну аналітичну ММ без суттєвого її ускладнення.

Спосіб побудови повної аналітичної ММ на основі локальних ММ

Машина постійного струму (МПС). З експерименту отримано залежність електрорушійної сили E від струму збудження I_3 магнітного потоку індуктора (рис. 1, крива 1).

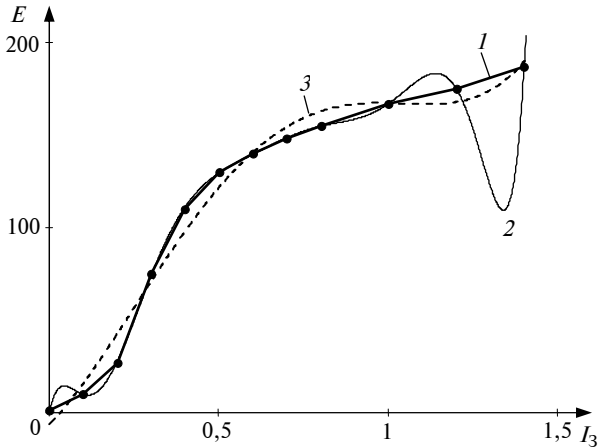


Рис. 1. Графік залежності $E(I_3)$

На ділянці від $I_3 = 0$ до $I_3 = 0,7$ А залежність апроксимуємо кубічною параболою, а на ділянці, де $I_3 \geq 0,7$ — лінійною залежністю:

$$\hat{E}(I_3) = \begin{cases} \beta_1 \cdot I_3^2 + \beta_2 \cdot I_3^3, & \text{якщо } I_3 < 0,7 \text{ А,} \\ \beta_3 + \beta_4 \cdot I_3, & \text{якщо } I_3 \geq 0,7 \text{ А.} \end{cases} \quad (1)$$

За методом найменших квадратів (МНК) визначено оцінки $\hat{\beta}_i$ коефіцієнтів β_i , $i = 1, 2, 3$, 4: $\hat{\beta}_1 = 1209$, $\hat{\beta}_2 = -1365$, $\hat{\beta}_3 = 111,2$, $\hat{\beta}_4 = 54,1$.

Якщо залежність $E(I_3)$ описати по МНК степеневим поліномом з відносно середньоквадратичною похибкою (СКП) не більше 1 %, то отримаємо поліном дев'ятого степеня. Для якого СКП становить 0,53 %, але який в проміжку між експериментальними точками має значну пульсацію (рис. 1, крива 2). Якщо зменшити степінь поліному до чотирьох (рис. 2, крива 3), то дуже зростає похибка апроксимації (СКП = 8,1 %). Тобто бажану високу точність апроксимації можна забезпечити лише кусково-поліноміальною логіко-аналітичною моделлю (1).

Щоб удосконалити спосіб кусково-поліноміальної апроксимації незручними логіко-аналітичними моделями (1), замінимо їх на аналітичні моделі, що являють собою суму часткових аналітичних моделей, помножених на аналітичні в усьому інтервалі змінні вагові функції $\eta(I_3)$:

$$\hat{E}(I_3) = (\beta_1 I_3 + \beta_2 I_3^3) \eta_1(I_3) + (\beta_3 + \beta_4 I_3) \eta_2(I_3),$$

$$\text{де } \eta_1(I_3) = \left(1 + \left(\frac{I_3}{0,7}\right)^n\right)^{-1}, \quad \eta_2(I_3) = \left(1 + \left(\frac{0,7}{I_3}\right)^n\right)^{-1},$$

підставивши отримаємо:

$$\hat{E} = \frac{(\beta_1 I_3 + \beta_2 I_3^3)}{1 + (0,43 I_3)^n} + \frac{(\beta_3 + \beta_4 I_3)}{1 + \left(\frac{0,7}{I_3}\right)^n}. \quad (2)$$

Залежність відносної СКП від n в моделі (2) подано в табл. 1.

Таблиця 1. Залежність відносної СКП

n	2	4	8	10	20	40	80	100
СКП, %	80	38	11	8	4	3	1,9	2,1

Аналітичність моделі (2) дає змогу, наприклад, аналітично визначити в будь-якій точці величину чутливості E до I_3 , пропорційну магнітній проникності μ середовища двигуна постійного струму і використати її для побудови розімкненої системи автоматичного регулювання напруги генератора постійного струму або швидкості обертання двигуна постійного струму, діагностувати стан магнітного кола індуктора МПС тощо.

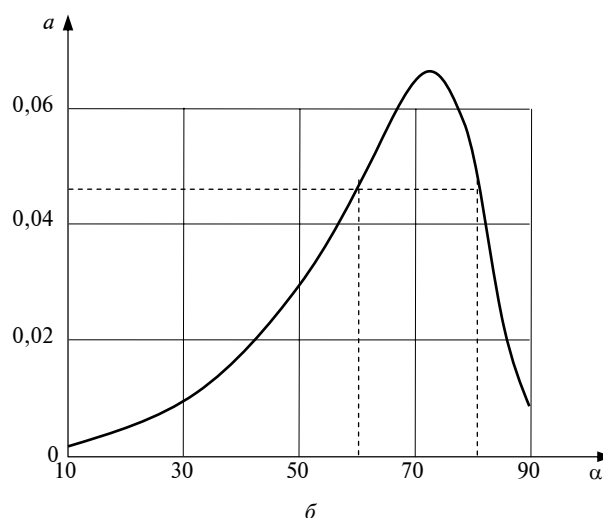
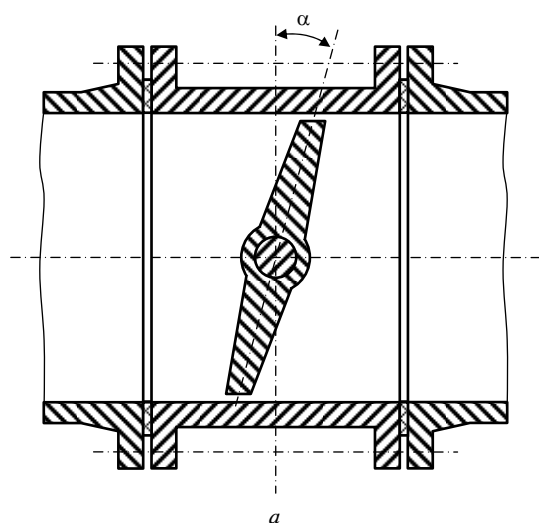
Для вибору структури вагових функцій можна скористатися теорією частотних фільтрів (низько-, високочастотних, смугових), якщо замість частоти розуміти незалежну змінну (у цьому прикладі I_3). Вмикаючи послідовно n фільтрів, отримаємо сумарну амплітудно-частотну характеристику, близьку до характеристики ідеального фільтра (у нашому прикладі $\eta_1(I_3)$ дорівнює n послідовно ввімкнених низькочастотних фільтрів частоти ω ; $\eta_2(I_3)$ — високочастотних, $\omega = I_3$).

Якщо треба виділити більше двох суміжних областей, додатково скористаємося смуговими фільтрами — ваговими функціями.

Заслінка трубопроводу. Відома структура математичної моделі (3) залежності обертового моменту M затвора безопорної поворотної заслінки трубопроводу (рис. 2, а):

$$M = a(\alpha) \Delta P D^3, \quad (3)$$

де ΔP — перепад тиску на диску; D — діаметр диска, який, обертаючись на кут α , змінює

Рис. 2. Заслінка (а) та характеристика залежності коефіцієнта a від кута α (б)

необхідний момент M . Залежність коефіцієнта a від кута α доцільно представити двома параболою та прямою

$$\hat{a}(\alpha) = \begin{cases} \beta_1 \alpha^2, & \alpha \in [0, 60^\circ], \\ \beta_2 + \beta_3(\alpha - 70^\circ)^2, & \alpha \in [60^\circ, 80^\circ], \\ \beta_4 + \beta_5(\alpha - 80^\circ), & \alpha \in [80^\circ, 90^\circ] \end{cases}$$

або однією аналітичною залежністю

$$\hat{a}(\alpha) = \beta_1 \alpha^2 \cdot \eta_1(\alpha) + [\beta_2 + \beta_3(\alpha - 70^\circ)^2] \eta_2(\alpha) + [\beta_4 + \beta_5(\alpha - 80^\circ)] \eta_3(\alpha), \quad (4)$$

де вагові функції $\eta_i(\alpha)$, ($i = 1, 2, 3$) мають, подібно до частотних фільтрів, такий вигляд:

$$\eta_1(\alpha) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{60}\right)^n}, \quad \eta_2(\alpha) = \frac{1}{1 + \left(\frac{60}{\alpha}\right)^n} \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{80}\right)^n}, \quad \eta_3(\alpha) = \frac{1}{1 + \left(\frac{80}{\alpha}\right)^n},$$

де n – доволі велике число (20×200) послідовно ввімкнених “фільтрів”.

Залежність відносної СКП від ступеня n в моделі (4) наведено в табл. 2.

Для більш точної моделі, представленої параболою та двома кубічними параболою з тими ж ваговими функціями $\eta_i(\alpha)$, залежно від кількості “фільтрів” n , отримуємо відповідні похибки апроксимації (табл. 3).

Таблиця 2. Залежність відносної СКП

n	4	8	10	20	40	80	100	200
СКП, %	48	22	16	8,7	7,5	7,1	7,0	7,0

Таблиця 3. Залежність відносної СКП

n	10	20	40	60	80	100	200
СКП, %	21,7	8,6	2,2	1,2	0,9	0,8	0,7

Інколи, з огляду на фізичні міркування та відповідні розрахунки, можна отримати теоретично кусково-аналітичну залежність, яка заданим методом перетворюється в аналітичну.

Камера горіння. Залежність температури θ в камері горіння від витрат повітря $G_{\text{пов}}$ за умови фіксованих витрат палива $G_{\text{пал}}$ [4] (рис. 3) знаходимо за формулою

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \frac{624,6 G_{\text{пов}}}{0,1 + 0,23 G_{\text{пов}}}, & \text{якщо } 0 \leq G_{\text{пов}} \leq 7,5 \text{ кг/с}, \\ \frac{4650 + 4,6 G_{\text{пов}}}{0,1 + 0,23 G_{\text{пов}}}, & \text{якщо } G_{\text{пов}} > 7,5 \text{ кг/с}. \end{cases} \quad (5)$$

Логіко-аналітичний опис (10) можна, згідно із запропонованим методом, замінити аналітичним:

$$\hat{\theta}(G_{\text{пов}}) = \frac{(624,6 G_{\text{пов}}) \eta_1(G_{\text{пов}})}{0,1 + 0,23 G_{\text{пов}}} + \frac{(4650 + 4,6 G_{\text{пов}}) \eta_2(G_{\text{пов}})}{0,1 + 0,23 G_{\text{пов}}}. \quad (6)$$

У табл. 4 наведено відносну СКП апроксимації кусково-аналітичної моделі (5) аналітич-

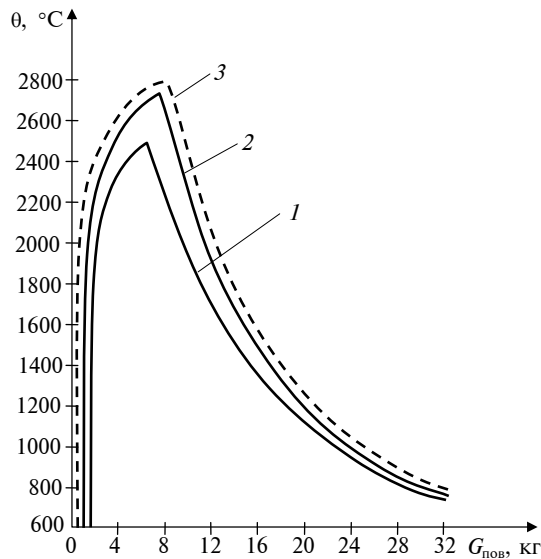


Рис. 3. Графік залежності $\theta(G_{\text{пов}})$; 1 – $G_{\text{нал}}=0,4$ кг/с; 2 – $G_{\text{нал}}=0,5$ кг/с; 3 – $G_{\text{нал}}=0,6$ кг/с

Таблиця 4. Залежність відносної СКП

n	2	4	8	10	20	40	80	100
СКП %	17	5,6	1,9	1,4	0,7	0,2	0,02	0,004

ною (6) залежно від числа n у вагових функціях η_1 і η_2 , подібних до використаних в аналітичних моделях МПС.

Якщо нелінійність багатовимірною $y(x_1, \dots, x_n)$ кусково-поліноміальна, то її об'єднання в єдину аналітичну досягається аналогічно одновимірній, тільки функції ваги $\eta_i(x_1, \dots, x_k, x_n)$, де x_k – незалежні змінні, задаються у вигляді добутиків часткових функцій $\eta_{ij} = \eta_i(x_j)$, тобто

$$\eta_i(x_1, \dots, x_n) = \eta_{i1}(x_1) \cdot \eta_{i2}(x_2) \cdot \dots \cdot \eta_{in}(x_n).$$

Транзистор. Розглянемо кусково-лінійну модель вольт-амперної характеристики (ВАХ) транзистора (рис. 4):

$$\hat{I}_D(U_{DS}) = \begin{cases} \beta_1 U_{DS}, & \text{якщо } U_{DS} < 0,5 \text{ V}, \\ \beta_2 + \beta_3 U_{DS}, & \text{якщо } U_{DS} \geq 0,5 \text{ V}. \end{cases}$$

Аналітична на всьому інтервалі U_{DS} модель має такий вигляд:

$$\hat{I}_D = (\beta_1 U_{DS}) \eta_1 + (\beta_2 + \beta_3 U_{DS}) \eta_2, \quad (7)$$

$$\text{де } \eta_1(U_{DS}) = \left(1 + \left(\frac{U_{DS}}{0,5}\right)^n\right)^{-1}, \quad \eta_2(U_{DS}) = \left(1 + \left(\frac{0,5}{U_{DS}}\right)^n\right)^{-1}.$$

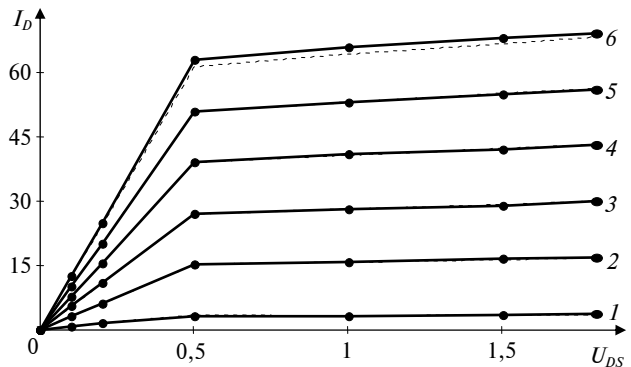


Рис. 4. Графік (лінії) і модель (пунктир) залежності $I_D(U_{DS}, U_G)$; $U_G(\text{V})$: 1 – 2,0; 2 – 2,1; 3 – 2,2; 4 – 2,3; 5 – 2,4; 6 – 2,5

Обмежимо модель (7) діапазоном U_G від 0 до 2,6 V і апроксимуємо залежність коефіцієнтів β_i ($i=1, 2, 3$) від другої змінної U_G лінійною моделлю

$$\hat{\beta}_i(U_G) = \gamma_{i0} + \gamma_{i1} \cdot U_G.$$

$$\text{Враховуючи, що } \eta_3(U_G) = \left(1 + \left(\frac{U_G}{2,6}\right)^n\right)^{-1} \text{ і}$$

$0 \leq U_G < 2,6$, отримуємо єдину аналітичну модель:

$$\hat{I}_D = (\beta_1 U_{DS} \eta_3) \eta_1 + ((\beta_2 + \beta_3 U_{DS}) \eta_3) \eta_2, \quad (8)$$

графік якої наведено пунктирними лініями на рис. 4.

Залежність відносної СКП для всіх даних $I_D(U_{DS}, U_G)$ від ступеня n в моделі (8) наведено в табл. 5.

Таблиця 5. Залежність відносної СКП

n	10	20	30	40	50	80	100
СКП, %	39	22	14	9,5	6,5	2,4	1,5

Для порівняння запропонованого методу і апроксимації степеневим поліномом, розглянемо ВАХ на всьому інтервалі першої змінної U_{DS} при фіксованому значенні другої змінної $U_G = 2,2$ V (рис. 5).

Опис степеневим поліномом шостого степеня має незначну для заданих точок відносну середньоквадратичну похибку 0,79 %, але містить значні пульсації між ними. Залежність відносної СКП в моделі (8) від ступеня n подано в табл. 6.

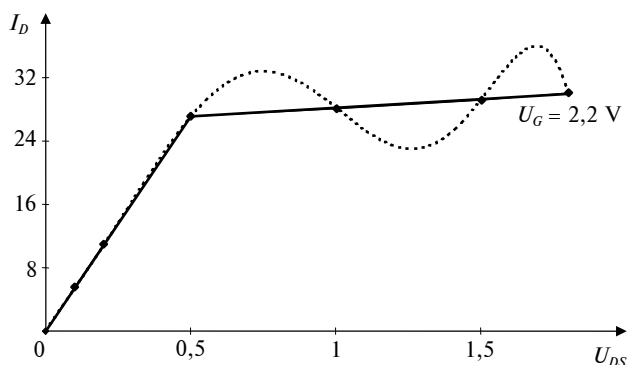


Рис. 5. Графік пульсацій при апроксимації

Таблиця 6. Залежність відносної СКП

n	10	20	30	40	50	80	100
СКП, %	25	8	1,9	0,6	0,7	0,8	0,8

Для $n \geq 40$ похибка апроксимації множини залежностей $I_D(U_{DS})$ при фіксованих U_G повністю аналітичною моделлю (8) не перевищує 0,8 %.

Відцентровий насос. Експлуатуючи відцентровий насос у мережі водопостачання, важливо знати, яким чином він себе поведе, якщо режим роботи буде змінюватись. Практичний інтерес становить можливість застосування насоса для забезпечення різноманітних вимог технологічних споживачів, коли спостерігаються зміни трьох основних взаємозв'язаних параметрів: витрат (Q), напору (H) та числа обертів (n) робочого колеса.

На рис. 6 наведено сукупність (Q - H)-характеристик насоса Д6300-80-2 з числом обертів робочого колеса $n_1 = 730$ об/хв та $n_2 = 585$ об/хв при зовнішньому діаметрі робочого колеса $D_1 = 1020$ мм, $D_2 = 970$ мм та $D_3 = 915$ мм, де напір H вимірюється у метрах [м], а витрата Q у [м³/год].

Напірна характеристика має кілька зон. Початкова точка відповідає роботі насоса на

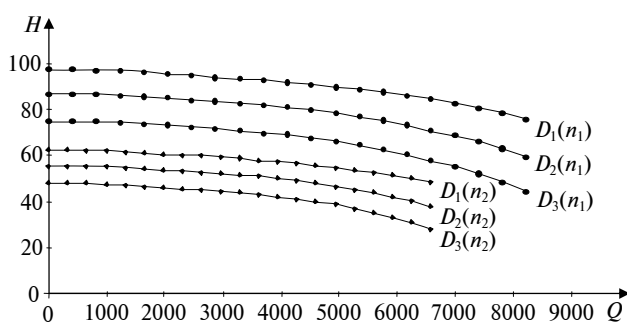


Рис. 6. Напірні характеристики насоса Д6300-80-2

закриту засувку на напірному патрубку. Оптимальна точка напірної характеристики відповідає максимальному значенню ККД.

Якщо напірна характеристика подається кратним рядом Тейлора чи його степеневим аналогом [5]:

$$H(Q, D, n) = H_0 + \sum_i \alpha_i Q_i + \sum_i \beta_i D_i + \sum_i \gamma_i n_i + \\ + \sum_i \sum_j \alpha_{ij} Q_i D_j + \sum_i \sum_j \beta_{ij} Q_i n_j + \dots + \sum_i \gamma_{ij} n_i^2, \quad (9)$$

то залишається проблема немонотонності моделі (9) через високий порядок поліномів $H(Q, \alpha)$, якщо цією залежністю подається весь діапазон витрати Q (від 0 до 8000 м³/год). Залежність $H(Q)$ має кусково-поліноміальний характер: у діапазоні витрати від 0 до 4000 м³/год залежність слабо нелінійна, а у робочій зоні від 4000 до 8000 м³/год має місце зростаюча нелінійність. Точне подання такої залежності на всьому діапазоні зміни Q потребує застосування полінома високого степеня і доволі складного та дорогого експерименту. При цьому, якщо кількість точок обмежена, то між ними виникають коливання (рис. 7) через велике значення порядку моделі (9).

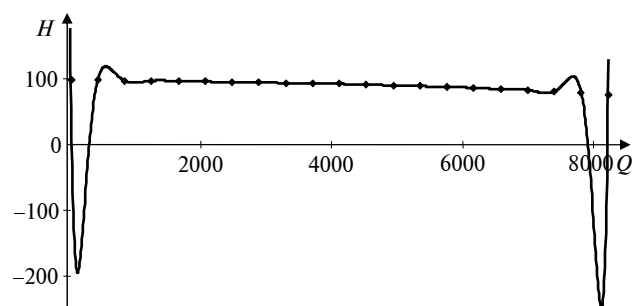


Рис. 7. Виникнення коливань між вимірами внаслідок високого порядку полінома (9)

Для вирішення цієї проблеми залежність $H(Q, \alpha)$ подається сумою двох простих локальних моделей, дія яких обмежується (подібно до частотних фільтрів) ваговими функціями $\eta(Q)$:

$$H(Q, \alpha) = H_1(Q_1, \alpha') \eta_1(Q) + \\ + H_2(Q_1, \alpha'') \eta_2(Q), \quad (10)$$

$$\text{де } H_1(Q_1, \alpha) = \alpha'_0 + \alpha'_1 Q + \alpha'_2 Q^2, \quad H_2(Q_1, \alpha) = \alpha''_0 + \\ + \alpha''_1 Q + \alpha''_2 Q^2, \quad \eta_1(Q) = \frac{1}{1 + \left(\frac{Q}{K_1}\right)^n}, \quad \eta_2(Q) = \frac{1}{1 + \left(\frac{K_2}{Q}\right)^n},$$

$$\bar{Q} = \frac{Q}{Q_{\max}}, \quad \alpha'_i = \beta'_{0_i} + \beta'_{1_i} D + \beta'_{2_i} D^2, \quad \alpha''_i = \beta''_{0_i} + \beta''_{1_i} D + \beta''_{2_i} D^2, \quad \beta'_{ji} = \gamma'_{0_{ji}} + \gamma'_{1_{ji}} n, \quad \beta''_{ji} = \gamma''_{0_{ji}} + \gamma''_{1_{ji}} n.$$

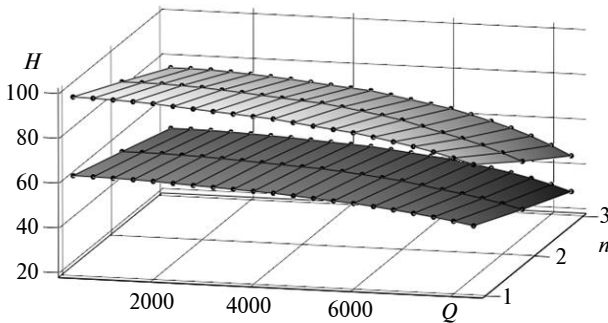


Рис. 8. Модель залежності напору H від витрати Q , зовнішнього діаметра робочого колеса D та кількості його обертів n

Через селективну спроможність вагових функцій $\eta_i(Q)$, $i = 1, 2$, матриця МНК буде блочно-діагональною. Тоді вектори α' та α'' моделі (10) визначаються взаємно незалежно, а їх розмірність незначна. Разом з тим, зазначена модель спроможна з високою точністю подати залежність $H(Q)$. На рис. 8 наведено результат застосування моделі (10) для побудови сукупності напірних характеристик насоса Д6300-80-2.

Унаслідок застосування запропонованого методу побудови та наступної композиції простих окремих моделей у загальну, а також процедури регуляризації, отримано достатньо точну (нормована середньоквадратична помилка становить 0,15 % від максимального значення H , тобто 0,154 м) і порівняно просту модель залежності $H(Q, n, D)$.

Висновок

Таким чином, запропонований підхід до побудови математичних моделей складних нелінійних залежностей між змінними реальних об'єктів ідентифікації, дає можливість не збільшуючи числа вимірювань, тобто складність і вартість натурного експерименту, отримати доволі прості локальні математичні моделі, які за допомогою вагових функцій – аналогів частотних фільтрів без суттєвого ускладнення об'єднуються в єдину для всього діапазону змінних об'єкта ідентифікації аналітичну залежність, тобто в повну математичну модель. А наявністю повної аналітичної математичної моделі одно- та багатовимірних кусково-аналітичних залежностей можна скористатися для стиснення таблично-графічної інформації про об'єкт до аналітичної, як показано для МПС, заслінки трубопроводу, камери горіння, транзистора та відцентрового насоса. Декомпозиція складної кусково-аналітичної залежності на прості локальні математичні моделі виключає проблему пульсації змінних математичної моделі в проміжках між експериментальними даними, а композиція локальних математичних моделей в повну аналітичну за допомогою аналітичних в усьому діапазоні вагових функцій дає змогу отримати із заданою точністю досить просту і точну математичну модель.

Подальше вдосконалення цього методу можливе в плані оптимізації структури вагових функцій, щоб за меншого числа n вони краще наближались до сигнум-функцій, що є аналогами ідеальних фільтрів.

1. Зеленський К.Х., Ігнатенко В.М., Коц О.П. Комп'ютерні методи прикладної математики. — К.: Академперіодика, 2002. — 480 с.
2. Методи теории автоматического управления / Под. ред. Н.Д. Егунова. — М.: МГТУ им. Баумана, 2000. — 748 с.
3. Бідюк П.І., Меньяйленко О.С., Половцев О.В. Методи прогнозування. — Луганськ: Альма-матер, 2008. — 608 с.
4. Сборник задач и примеров по теории автоматического управления / Под. ред. А.В. Фатеева. — М.: Высш. шк., 1969. — С. 119–125.
5. Лурье М.В. Математическое моделирование процессов трубопроводного транспорта нефти, нефтепродуктов и газа. — М.: Нефть и газ, 2003. — 336 с.